Esercizio 2.19 Siano a e b due numeri positivi e $\{a_n\}$ una successione tale che $a < a_n < b$, per ogni n. Si dimostri che $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

carabinieri

Esercizio 2.20 Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

Esercizio 2.21 Si dimostri (per induzione) che [14]:

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\, n\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{2.18}$$

e che vale la disuguaglianza stretta per $n \geq 2$.

dato $a < a_n < b$ so che

$a^{\frac{1}{n}} < a_n^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$ (infatti $x^{\frac{1}{n}}$ è crescente in x)

quindi per il Teorema dei Carabinieri

$a^{\frac{1}{n}} \to 1$; $b^{\frac{1}{n}} \to 1$

2.20 $\quad 0 \leq \dfrac{n!}{n^n} = 1 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

di nuovo per il Teorema dei Carabinieri,

$\dfrac{n!}{n^n} \to 0$

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\,n\,,$$

verifico per $n = 1$ $\qquad e \cdot \frac{1}{e} \leq 1 \leq e \cdot \frac{1}{e} \cdot 1$

Voglio verificare che se $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e \cdot n$

allora $\quad e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq (n+1)! \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot e \cdot n+1$

Noto che se

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e \cdot n$$

$$\Downarrow$$

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1) \leq (n+1)\,n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n e \cdot n \cdot (n+1)$$

per verificare la tesi basta mostrare

che vale

(A) $\quad e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq e\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1)$

(B) $\quad \left(\frac{n}{e}\right)^n e \cdot n \cdot (n+1) \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot e \cdot n+1$

Verifico (A) [Bisogna usare la

definizione di e_n, E_n e $e_n \nearrow e$; $E_n \searrow e$

$$e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq e\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot(n+1)$$ è equivalente

a

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n+1} \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \leq e$$ ma $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = e_n \leq e$ ■

Verifico (B)

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n} e\cdot n\cdot(n+1) \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\cdot e\cdot n+1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}\cdot n \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot e \leq 1 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq e$$

cioé $E_n \geq e$ (che è vero) ■

Esercizio 2.23 Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim a_{2n} = \lim a_{2n-1} = L \in \mathbb{R}^*$. Si dimostri che $\lim a_n = L$.

Esercizio 2.24 Dato $\alpha > 0$, studiare il limite della successione

$$a_1 = \alpha \text{ e, per } n \geq 1, a_{n+1} = a_n/(1 + a_n).$$

Esercizio 2.25 Studiare il limite della successione

$$a_1 = 1 \text{ e, per } n \geq 2, a_n = 1/(2 + a_{n-1}).$$

$L^2 + 2L$

$L = -$

$L(2+L$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_1(\varepsilon):$ se $k > K_1$ allora

$|a_{2k} - L| < \varepsilon$.

$\exists K_2:$ se $k > K_2(\varepsilon)$ allora $|a_{2k-1} - L| < \varepsilon$

quindi se prendo $N(\varepsilon) = \{\max(K_1, K_2)\} + 1$

se $n > N(\varepsilon)$ allora:

se n è pari $(n = 2k)$ $k > K_1$

se n è dispari $(n = 2k-1)$ $k > K_2$

quindi in ogni caso $|a_n - L| < \varepsilon$ ▨

2.24 $a_1 = \alpha$ $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

ora dato che $a_n > 0 \quad \forall n$

si vede che la successione $a_n \searrow$

quindi ammette limite. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

dato che $f(x) = \frac{x}{1+x}$ è continua per $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{1 + \lim_{n\to\infty} a_n}$$

ora $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$

quindi $a = \frac{a}{1+a} \Rightarrow a = 0$

Verifica alternativa

$$b_n = \frac{1}{a_n} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 1$$

cioè $\quad b_{n+1} = b_n + 1$

quindi $\quad b_k = \alpha + k - 1$

e infine $\quad a_k = \dfrac{1}{\alpha + k - 1} \searrow 0$

$a_1 = 1$ e, per $n \geq 2$, $a_n = 1/(2 + a_{n-1})$.

ragionando come prima

se il limite esiste allora

$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a\right)$ deve soddisfare

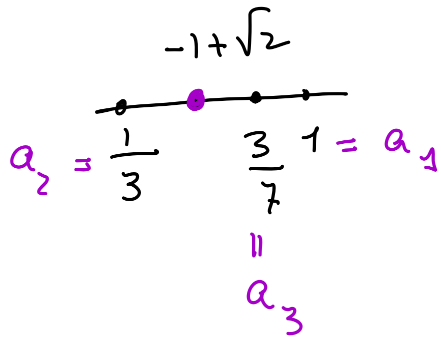
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2 + \lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$a = \frac{1}{2+a}$$

cioè $\quad a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1 + \sqrt{2}$

(REM. $a \geq 0$ per il teorema della permanenza del segno)

Bisogna verificare che il limite esiste.



$$a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}$$

$a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$; -

$a_4 = \frac{1}{2+\frac{3}{7}} = \frac{7}{17}$ ....

Calcolando i primi termini sospetto che

$a_{2k} < -1+\sqrt{2}$ mentre $a_{2k+1} > -1+\sqrt{2}$

Quindi provo ad usare l'esercizio 2.23.

Strategia:

PASSO 0. Verificare che $a_{2k} \le -1+\sqrt{2} \le a_{2k-1}$ $\forall k \ge 1$

PASSO 1. mostrare che $\{a_{2k}\}$ è monotona crescente e $\{a_{2k-1}\}$ è monotona decrescente

PASSO 2. Dedurre che $\lim_{k\to\infty} a_{2k}$ e

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$ esistono.

PASSO 3. Se i limiti esistono allora devono valere $-1+\sqrt{2}$

PASSO 4. Dall' Es. 2.23 deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1+\sqrt{2}$$

PASSO 5. per induzione $a_2 \leq -1+\sqrt{2}$

$$a_{2(k+1)} = \frac{1}{2+a_{2k+1}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+a_{2k}}}$$

$$= \frac{2+a_{2k}}{5+2a_{2k}} = \frac{2-\frac{5}{2}}{5+2a_{2k}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5+2a_{2k}}\right)$$

(uso $a_{2k} \leq -1+\sqrt{2}$)

$$\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5+2(-1+\sqrt{2})}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right) = (1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$$

Allo stesso modo faccio a_{2k-1}

PASSO 1.

$a_{2(k+1)} \geq a_{2k}$ è equivalente

a $\frac{2+a_{2k}}{5+2a_{2k}} \geq a_{2k}$ cioè

(rem. $5+2a_{2k} > 0$)

$$a_{2k}(5+2a_{2k}) - a_{2k} - 2 \leq 0$$

$$2a_{2k}^2 + 4a_{2k} - 2 \leq 0 \iff$$

$a_{2k}^2 + 2a_{2k} - 1 \leq 0$ che è verificato

se $-1-\sqrt{2} \leq a_{2k} \leq -1+\sqrt{2}$

(ma dal passo 0 io so che !

$0 \leq a_{2k} \leq -1+\sqrt{2}$)

Faccio lo stesso per i dispari.

PASSO 2. Basta osservare che se ho una successione monotona e limitata allora ammette limite finito

PASSO 3. $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a_{PARI}$

$$a_{2(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5+2a_{2k}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5+2\lim_{k\to\infty} a_{2k}}\right)$$

$$\parallel$$

$$a_{PARI} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5+2a_{pari}}\right)$$

cioè

$$\frac{a_{pari}^2 + 2a_{pari} - 1}{5+2a_{pari}} = 0$$

cioè $a_{pari} = -1+\sqrt{2}$

Stesso per $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = a_{disp}$.

Dimostrazione alternativa

per far vedere che il limite esiste basta verificare che $\{a_n\}$ è di CAUCHY. cioè che $\forall \varepsilon \ \exists N$: $\forall n,m > N$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

ora

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{1}{2+a_n} - \frac{1}{2+a_{n-1}} \right|$$

$$= \frac{|a_{n-1} - a_n|}{(2+a_n)(2+a_{n-1})}$$

$$\leq \frac{1}{4} |a_{n-1} - a_n|$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |a_{n-2} - a_{n-1}|$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$$

quindi ponendo $m > n$ e $m = n + h$

$$|a_{n+h} - a_n| = |a_{n+h} - a_{n+h-1} + a_{n+h-1}$$

$$- a_{n+h-2} + a_{n+h-2} + \dots + a_{n+1} - a_n|$$

$$\leq |a_{n+h} - a_{n+h-1}| + |a_{n+h-1} - a_{n+h-2}|$$

$$+ \dots + |a_{n+1} - a_n|$$

$$= \sum_{k=n}^{n+h-1} |a_{k+1} - a_k|$$

$$\leq |a_2 - a_1| \sum_{k=n}^{n+h-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{|a_2 - a_1|}{1 - \frac{1}{4}} < \varepsilon$$

se prendo n suff. grande. $\blacksquare$

Esercizio: Determinare al variare di $p \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^4 + 2n}{n^4 + 3n^3} \right)^{2n^p - 1}$$

$$\frac{n^4 + 2n}{n^4 + 3n^3} \to 1 \quad \text{quindi} \quad \text{se } p \leq 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^4 + 2n}{n^4 + 3n^3} \right)^{2n^p - 1} = 1^0 = 1.$$

se $p > 0$ si ottiene la forma indet 1^∞.

Per risolvere tale forma indet. ricordo che $\forall \{b_n\}: b_n \to 0$

$$(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}} \to e$$

pongo

$$\frac{n^4 + 2n}{n^4 + 3n^3} = 1 + b_n \quad \text{cioè}$$

$$b_n = \frac{n^4+2n}{n^4+3n^3} - 1 = \frac{-3n^3+2n}{n^4+3n^3} \sim -\frac{3}{n} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+2n}{n^4+3n^3}\right)^{2n^p-1} = \text{(dato che } b_n \neq 0\text{)}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+b_n)^{\frac{1}{b_n}\cdot b_n(2n^p-1)} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} (1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}\right]^{\lim_{n\to\infty} b_n(2n^p-1)}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} b_n(2n^p-1)}$$

ora $\lim_{n\to\infty} b_n(2n^p-1) =$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{3}{n}(2n^p-1) =$$

$$-6\lim_{n\to\infty} n^{p-1} = \begin{cases} -\infty & \text{se } p>1 \\ -6 & \text{se } p=1 \\ 0 & \text{se } p<1 \end{cases}$$

quindi

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^4 + 2n}{n^4 + 3n^3} \right)^{2n^p - 1} = \begin{cases} e^{-\infty} = 0 & \text{se } p > 1 \\ e^{-6} & \text{se } p = 1 \\ e^{0} = 1 & \text{se } p < 1 \end{cases}$$